

## Penerapan Metode Wavelet Thresholding untuk Mengaproksimasi Fungsi Nonlinier

M Luthfie Janariah<sup>1</sup>, Syamsul Bahri<sup>1\*</sup>, Nurul Fitriyani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departement of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Mataram, Indonesia.*

\*Corresponding author: [syamsul.math@unram.ac.id](mailto:syamsul.math@unram.ac.id)

---

### ARTICLE INFO

#### Article History :

Received: 28-04-2021

Revised: 03-08-2021

Accepted: 04-08-2021

#### Keywords :

Apresiasi; Denoising;  
Fungsi Nonlinear;  
Threshold; Wavelet

#### How To Cite :

Janariah, M.L., Bahri, S., Fitriyani, N. (2021). Penerapan Metode Wavelet Thresholding untuk Mengaproksimasi Fungsi Nonlinier. *Indonesian Physical Review* 4(3) pp 122-137

#### DOI :

<https://doi.org/10.29303/ipr.v4i3.98>

### ABSTRACT

*The wavelet thresholding method is an approximation method by reducing noise, which is known as the denoising process. This denoising process will remove noise while closed the important information in the data. In this research, the wavelet thresholding method is used to approximate the nonlinear function. The data used for the simulation is a representation of several functions that represent several events that often occur in the real world, which consists of the types of functions Blocks, Bumps, Doppler, and HeaviSine. Based on simulation results based on the indicator value of the Cross-Validation (CV), the best approximation of the nonlinear function using the wavelet thresholding method for the four simulation cases are: (i) the Blocks function is given by Haar wavelet with a soft of thresholding function and the 10-th resolution level ; (ii) the Doppler function is given on the 2-nd order of Symlets wavelet with a soft of thresholding function and the 10-th resolution level; (iii) the Bumps function is given on the 6-th order of Daubechies wavelet with a soft of thresholding function and the 10-th resolution level; and (iv) the HeaviSine function is given by the 3-rd order of Coiflet wavelet with a soft of thresholding function and the 7-th resolution level.*

Copyright © 2021 Authors All rights reserved.

---

### Pendahuluan

Berbagai fenomena yang terjadi secara alami cukup menarik dan memberi banyak manfaat bagi kehidupan manusia. Namun pada kenyataannya, fenomena-fenomena tersebut sulit untuk dipelajari karakteristiknya karena keterbatasan informasi yang terkait seperti bentuk fisik, warna, bau, dan/atau model matematisnya. Fenomena-fenomena tersebut diantaranya getaran gempa, pergerakan harga saham, curah hujan, intensitas radiasi, intensitas polusi

udara dan sebagainya. Para ilmuwan mempelajari fenomena-fenomena seperti itu melalui proses visualisasi per satuan waktu pengamatan yang menghasilkan suatu kurva atau grafik. Dengan adanya kurva representasi ini, karakteristik dari fenomena-fenomena tersebut sedikit demi sedikit mulai dapat dipelajari, diantaranya penentuan model matematisnya.

Model matematis dari suatu kurva atau grafik sebagai representasi suatu fenomena yang terjadi secara umum berbentuk tidak linear (*nonlinear*). Secara analitis, representasi kurva tersebut sulit untuk ditentukan. Salah satu teknik atau metode yang dapat dilakukan adalah menggunakan metode numerik yang dikenal dengan nama tehnik aproksimasi [1,2]. Beragam penelitian telah menggunakan teknik aproksimasi, khususnya dalam aproksimasi fungsi nonlinear diantaranya [3] menggunakan algoritma *adaptive geedy*, [4] menggunakan *neural network*, dan [5] menggunakan pendekatan *piecewise linear*. Aproksimasi suatu kurva yang direpresentasikan sebagai grafik dari suatu fungsi nonlinear, dapat dilakukan dengan berbagai teknik diantaranya metode *time series*, transformasi Fourier, dan teknik wavelet [6].

*Wavelet* merupakan salah satu metode matematika yang secara masif menjadi alternatif dalam analisis sinyal atau gambar. Pada beberapa dekade terakhir, penerapan transformasi wavelet banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah nyata karena mampu menggambarkan proses *nonstationer* secara lebih baik. Jika dibandingkan dengan transformasi Fourier, penggunaan *wavelet* jauh lebih masif dan banyak menarik perhatian, terutama karena kemampuan *wavelet* dalam menganalisis data, baik data stasioner maupun nonstationer dan termasuk dalam hal mengestimasi fungsi-fungsi yang mulus [7]. Di sisi lain, kekurangan transformasi Fourier sebagai alat analisis, khususnya berkaitan dengan data *nonstationer*, diantaranya metode ini tidak dapat melokalisasi domain waktu, dan kompleksitas komputasi pada algoritma dekomposisi yang relatif lebih besar [8, 9].

Penggunaan metode wavelet sebagai alat analisis grafik, khususnya terkait dengan aproksimasi fungsi adalah metode *wavelet thresholding*. Metode ini dapat memberikan hasil aproksimasi yang cukup baik melalui langkah mereduksi *noise* (gangguan) yang terdeteksi [10; 11]. Metode *wavelet thresholding* dapat diterapkan pada data runtun waktu, stasioner, dan fungsi nonlinear [12].

Beberapa penelitian telah dilakukan berkaitan dengan penggunaan metode *wavelet thresholding*. Diantaranya, telah mengenalkan langkah-langkah estimasi kurva menggunakan *wavelet thresholding* dengan menggunakan bahasa pemrograman R [13]. Selanjutnya membandingkan estimator regresi nonparametrik menggunakan metode wavelet dengan metode Fourier [14], dan telah mengenalkan *minimax thresholding* dalam metode *wavelet thresholding* [15]. Adapun [16] telah membandingkan beberapa metode untuk mendapatkan nilai *threshold* optimum dalam mereduksi data *noise*. Pada penelitian ini, diperlihatkan bahwa penggunaan metode *wavelet thresholding* secara signifikan mampu mengaproksimasi fungsi-fungsi *nonlinear* tipe Blocks, Bumps, Doppler, dan Heavisine yang diberi *noise*.

### **Teori Dasar**

Metode *wavelet thresholding* seringkali disebut estimator *wavelet nonlinier*. Misalkan sinyal yang diamati dalam deret waktu dengan panjang  $m$  direpresentasikan sebagai fungsi:

$$y(t) = x(t) + n(t), \quad t = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (1)$$

dengan  $n(t)$  menyatakan *additive noise*, dan  $x(t)$  adalah sinyal asli. Secara umum, tidak ada informasi yang tersedia tentang  $x(t)$  dan  $n(t)$  secara jelas, seperti fungsi kepadatan peluang, standar deviasi, dan sebagainya. Akibatnya, domain representatif dari sinyal yang mampu membedakan sinyal asli dari gangguan akan membantu untuk masalah pengurangan *noise*. Dalam penggunaan metode *wavelet*, mengharuskan jumlah titik data  $n = 2^m$  dan  $x_i = \frac{i}{n}$  untuk suatu bilangan asli  $n$  dan  $m$ , serta  $i = 1, 2, \dots, n$  maka  $y_i \sim \left(f\left(\frac{i}{n}\right), \sigma^2\right)$  dengan  $\sigma$  menyatakan simpangan data. Rata-rata dan varian dari  $\hat{d}_{j,k}$  adalah  $E[\hat{d}_{j,k}] = d_{j,k}$  dan  $var(\hat{d}_{j,k}) = \frac{\sigma^2}{n}$  sehingga  $\hat{d}_{j,k} \sim \left(d_{j,k}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , dengan koefisien *wavelet* empiris  $\hat{d}_{j,k}$  memuat sejumlah noise dan hanya relatif sedikit yang memuat sinyal signifikan. Dengan demikian dapat direkonstruksi estimator *wavelet* dengan sejumlah koefisien terbesar metode ini menekankan rekonstruksi *wavelet* dengan menggunakan sejumlah koefisien terbesar, yakni hanya koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien yang lainnya diabaikan, atau dianggap nol. Nilai tertentu tersebut dinamakan nilai *thresholding* (batas ambang) dan estimatornya menghasilkan:

$$f_{\lambda}(x) = \sum_k \hat{c}_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \partial_{\lambda} \left( \frac{\sqrt{n} d_{j,k}}{\sigma} \right) \psi_{j,k}(x) \quad (2)$$

dengan

$\hat{c}_{j_0,k}$  : penduga koefisien fungsi skala  $c_{j_0,k}$

$\hat{d}_{j,k}$  : penduga koefisien *wavelet*  $d_{j,k}$

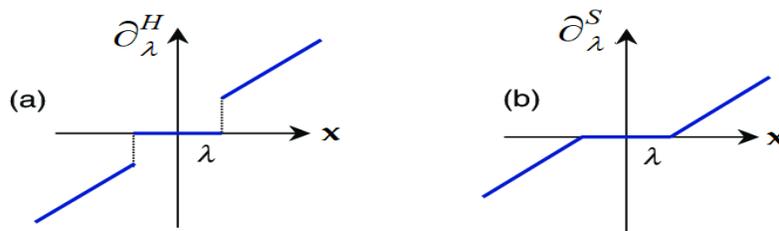
$\lambda$  : parameter nilai *thresholding*

$\partial_{\lambda}$  : fungsi *thresholding*

$\sigma$  : simpangan data

Dalam penerapannya, terdapat dua jenis fungsi *wavelet thresholding*  $\partial_{\lambda}$ , yaitu:

- a) *Hard thresholding*:  $\partial_{\lambda}^H(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$
- b) *Soft thresholding*:  $\partial_{\lambda}^S(x) = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \lambda), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$



**Gambar 1.** Grafik fungsi (a) *Hard Thresholding* dan (b) *Soft Thresholding*

Fungsi *hard thresholding* merupakan fungsi dikontinu yang memberikan nilai nol untuk setiap domain yang nilai absolutnya kurang dari nilai *thresholding*  $\lambda$  dan bernilai dirinya sendiri untuk domain yang lebih besar atau sama dengan nilai *thresholding*  $\lambda$ . Sebaliknya, fungsi *soft thresholding* merupakan fungsi kontinu untuk setiap nilai  $x$  pada domainnya. Motivasi penggunaan *soft thresholding* berasal dari prinsip bahwa *noise* mempengaruhi seluruh koefisien *wavelet*. Sifat kontinu dari fungsi *soft thresholding* secara statistika juga memberikan kondisi yang lebih dalam hal aproksimasi suatu fungsi atau data [13, 17, 18].

Dalam merekonstruksi fungsi *wavelet*, biasanya nilai  $\sigma$  tidak diketahui. Oleh karena itu,  $\sigma$  harus diestimasi dari data. Estimasi  $\sigma$  didasarkan pada koefisien *wavelet* empiris pada level resolusi tertinggi dengan fungsi median deviasi absolut [19].

$$\sigma = \frac{\text{median}\left(\left|d_{j-1,k} - \text{median}\left(d_{j-1,k}\right)\right|\right)}{0,6745} \quad (3)$$

Prinsip dari estimator *wavelet thresholding* adalah mempertahankan koefisien *wavelet* yang nilainya lebih besar dari suatu nilai *thresholding* tertentu dan mengabaikan koefisien *wavelet* yang kecil. Selanjutnya koefisien *wavelet* yang besar ini digunakan untuk merekonstruksi fungsi aproksimasi yang dicari.

### Metode Penelitian

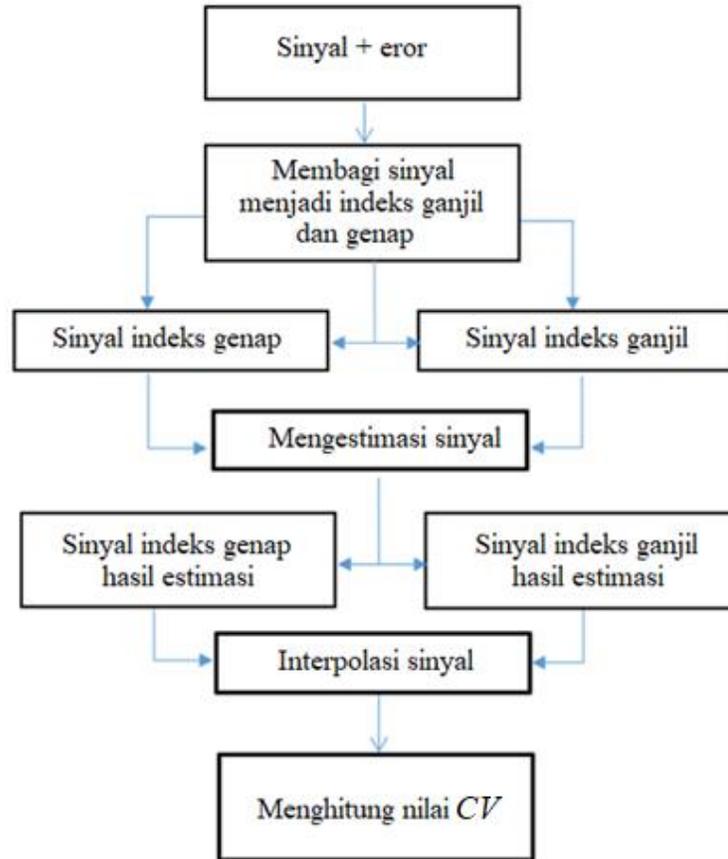
Pada penelitian ini dilakukan simulasi penerapan *wavelet* dalam mengaproksimasi suatu fungsi non linear. Simulasi melibatkan empat tipe fungsi yaitu fungsi Block, Bumps, Heavy sine, dan Doppler dengan empat basis *wavelet* yaitu Haar, Daubechies, Symlet, dan Coiflet, dengan kombinasi level resolusi dan fungsi *thresholding* yang digunakan pada setiap basisnya. Komputasi dilakukan dengan menggunakan Python dengan library yang memuat tools *wavelet* (*pywavelet*). Untuk setiap bentuk fungsi, banyaknya data yang digunakan untuk simulasi adalah 1.024 data.

Tahapan penelitian dimulai dengan perancangan simulasi, yaitu membangkitkan sinyal menggunakan keempat fungsi dasar yaitu fungsi Blocks, Bumps, Doppler, dan Heavisine. Berdasarkan standar deviasi dari masing-masing fungsi tersebut, kemudian digunakan untuk membangkitkan eror yang akan ditambahkan pada masing-masing fungsi tersebut, yang selanjutnya dijadikan sebagai sinyal yang mengandung *noise*. Kemudian sinyal yang mengandung *noise* ini digunakan sebagai data masukan pada proses aproksimasi menggunakan metode *wavelet thresholding*. Berikut alur proses aproksimasi menggunakan metode *wavelet thresholding*.

$$y \xrightarrow{DWT} \{c_{j0k}, d_{jk}\} \xrightarrow{\text{Thresholding}} \{c_{j0k}, \delta_{\lambda}(d_{jk})\} \xrightarrow{IDWT} \hat{g}_{\lambda} \quad (4)$$

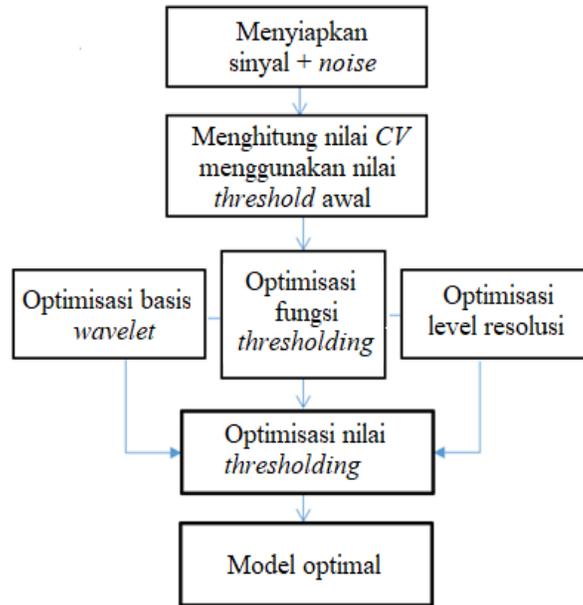
Proses aproksimasi dimulai dengan melakukan dekomposisi terhadap setiap fungsi menggunakan transformasi *wavelet* diskrit, dan diperoleh koefisien *wavelet* untuk setiap sinyalnya. Kemudian koefisien *wavelet* yang diperoleh diseleksi menggunakan nilai tertentu (*threshold*) dan diperoleh koefisien baru hasil *thresholding*. Koefisien *wavelet* baru yang diperoleh direkonstruksi kembali menjadi sinyal utuh menggunakan transformasi *wavelet* balikan dan diperoleh sinyal baru hasil aproksimasi menggunakan metode *wavelet*

*thresholding*. Kemudian menghitung nilai *Cross-Validation* (CV) dari model yang digunakan dalam proses aproksimasi. Nilai CV digunakan sebagai indikator kebaikan model untuk mendapatkan model optimal dalam proses aproksimasi menggunakan metode *wavelet-thresholding*. Menghitung nilai CV menggunakan metode *Two-Fold CV* dilakukan dengan beberapa langkah seperti bagan berikut ini (Gambar 2).



**Gambar 2.** Langkah-langkah menghitung nilai CV

Parameter yang mempengaruhi tingkat kemulusan kurva dalam Aproksimasi Fungsi menggunakan metode *wavelet thresholding* adalah pemilihan jenis fungsi *wavelet*, level resolusi, jenis fungsi *thresholding*, dan nilai *thresholding* [13, 17, 18]. Sehingga untuk mendapat hasil terbaik dilakukan optimasi untuk setiap parameter. Proses optimalisasi dibagi dua, proses optimalisasi pertama terhadap basis *wavelet* dan level resolusi yang digunakan pada proses transformasi *wavelet*, serta fungsi *thresholding* yang digunakan pada proses *thresholding*. Kemudian proses optimalisasi kedua khusus nilai *threshold* yang menjadi batas ambang pada proses *thresholding* dilakukan optimalisasi khusus menggunakan metode optimalisasi *heuristic golden section search*.



**Gambar 3.** Langkah-langkah optimalisasi parameter

Nilai CV yang diperoleh menggunakan metode *twofold cross validation* adalah nilai CV optimal untuk setengah data. Pada *universal threshold*, nilai threshold  $\lambda$  optimal untuk  $n$  data adalah:

$$\lambda(n) = \sqrt{2 \log(n)} \quad (5)$$

Persamaan (5) secara heuristik memberikan nilai threshold yang cocok untuk  $n$  titik data. Berdasarkan Persamaan (5), nilai threshold optimal untuk  $n/2$  titik data adalah:

$$\lambda\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{2 \log\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (6)$$

Melalui manipulasi aljabar, Persamaan (6) memberikan:

$$\lambda(n) = \left(1 - \frac{\log 2}{\log n}\right)^{-\frac{1}{2}} \lambda\left(\frac{n}{2}\right) \quad (7)$$

dan selanjutnya Persamaan (7) digunakan sebagai nilai threshold optimal untuk  $n$  data [19].

### Hasil dan Pembahasan

Representasi fungsi nonlinear pada kehidupan sehari-hari dapat dipandang sebagai kurva atau grafik dari suatu fungsi dan seringkali berbentuk fungsi nonlinear. Selanjutnya, diantara fungsi nonlinear yang banyak merepresentasikan fenomena nyata adalah fungsi Bumps, Blocks, Heavisine, dan Doppler akan digunakan sebagai basis fungsi dalam simulasi pada tulisan ini.

Fungsi Block merupakan representasi sinyal yang menggambarkan independensi dari media berlapis dalam geofisika, dan cuplikan 1-d yang sering muncul sepanjang kurva tertentu dalam pemrosesan gambar. Fungsi Blocks diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$f(x) = \sum_j h_j K(x-t_j) \quad (8)$$

dengan

$$K(x) = \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} \quad (9)$$

dan

$$t_j = (1; 13; 15; 23; 25; 40; 44; 65; 76; 78)$$

$$h_j = (4; -5; 3; -4; 5; -4,2; 2,1; -4,3; 3,1; -5)$$

$$x = 0,1,2,3, \dots, t \text{ dan } t = 2^n, n \in \mathbb{N}$$

Fungsi Bumps adalah representasi sinyal yang menggambarkan loncatan spektrum yang sering muncul pada spektroskopi *NMR*, *Infrared*, dan absorpsi *spectroscopy*. Fungsi Bumps diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$f(t) = \sum_j h_j K\left(\frac{t-t_j}{w_j}\right) \quad (10)$$

dengan

$$K(t) = (1 + |t|)^{-1} \quad (11)$$

dan

$$t_j = t_{Blocks}$$

$$h_j = (4; 5; 3; 4; 5; 4,2; 2,1; 4,3; 3,1; 5)$$

$$w_j = (0,005; 0,005; 0,006; 0,01; 0,01; 0,03; 0,01; 0,01; 0,005; 0,008; 0,005)$$

$$x = 0,1,2,3, \dots, t \text{ dan } t = 2^n, n \in \mathbb{N}$$

Fungsi Heavisine adalah fungsi sinus yang “rusak” dengan dua lompatan. Sinyal fungsi seperti ini pada penerapannya menggambarkan pola data runtun waktu seperti data pergerakan saham, curah hujan, polusi udara, dan lainnya. Fungsi Heavisine diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$f(t) = 4 \sin(4\pi t) - \text{sign}(t - 0.3) - \text{sign}(0.72 - t) \quad (12)$$

dengan

$$x = 0,1,2,3, \dots, t \text{ dan } t = 2^n, n \in \mathbb{N}$$

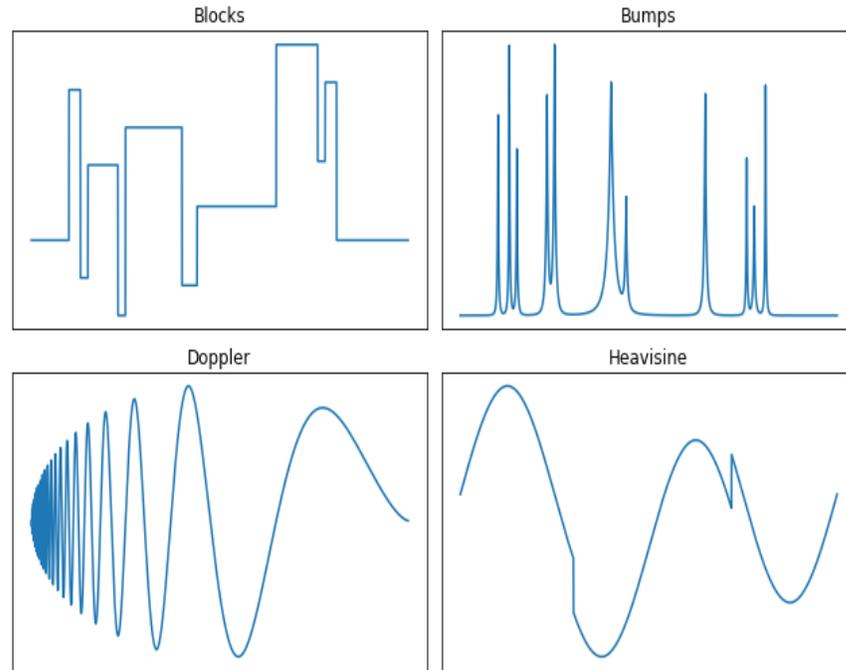
Fungsi Doppler, sesuai namanya merupakan gambaran dari efek Doppler. Pemrosesan matematika dari fungsi ini diperumit oleh variasi frekuensi dan amplitudo yang signifikan. Fungsi ini menjelaskan banyak proses pada masalah kedokteran, optik, dan sejumlah ilmu terapan lainnya dimana efek Doppler digunakan, seperti perubahan panjang gelombang

untuk pengamat yang bergerak relatif terhadap sumber gelombang. Fungsi Doppler diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$f(t) = (t(1-t))^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2\pi(1+\varepsilon)}{t+\varepsilon}\right) \quad (13)$$

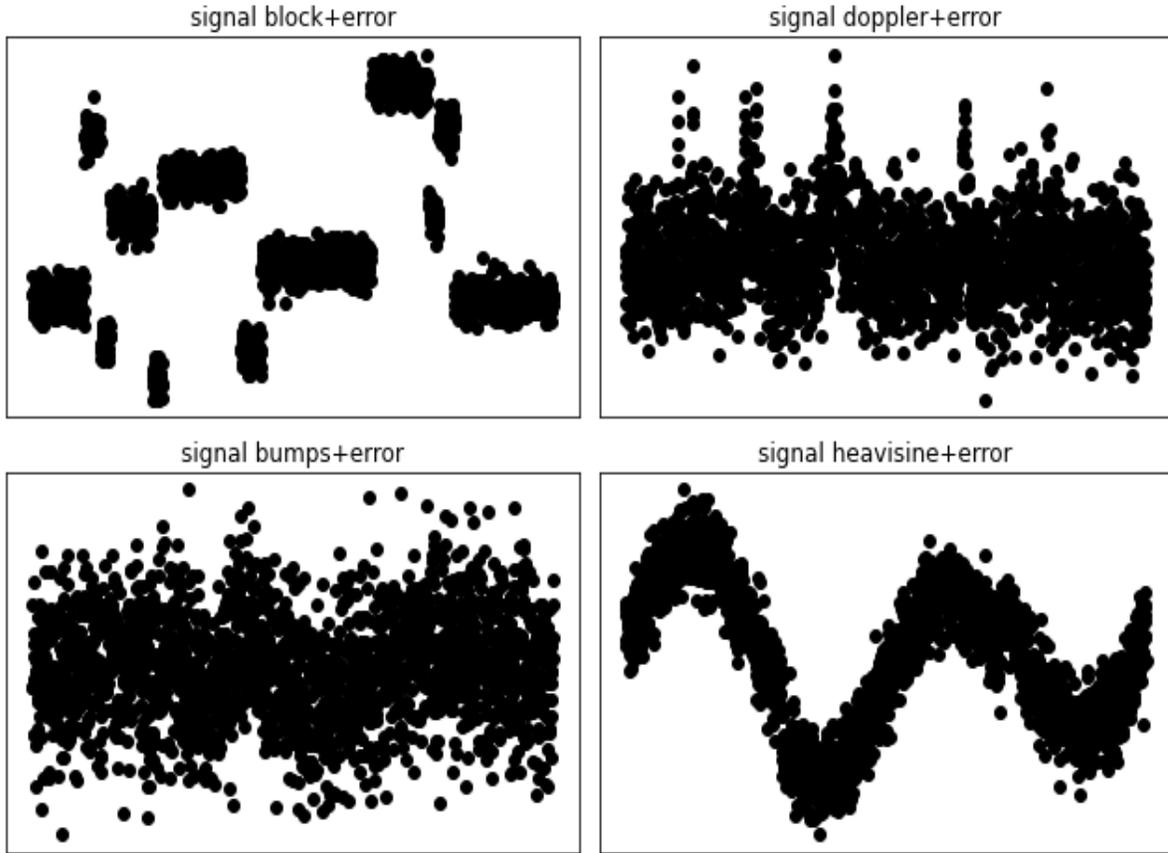
dengan

$$x = 0,1,2,3, \dots, t \text{ dan } t = 2^n, n \in \mathbb{N}$$



**Gambar 4.** Grafik dari fungsi Blocks, Bumps, Doppler, dan Heavisine

Ditinjau berdasarkan tujuan dari penelitian ini untuk mengaproksimasi fungsi yang bentuk kurvanya tidak diketahui, setiap fungsi dimodifikasi sedemikian hingga diperoleh sinyal yang bentuknya “rusak” dengan ditambahkan suatu eror, dalam hal ini eror yang berdistribusi Normal (0,1). Metode *wavelet thresholding* adalah metode yang digunakan untuk merekonstruksi data yang “dirusak” menggunakan sejumlah koefisien *wavelet threshold*, yakni hanya koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien yang lainnya diabaikan (dianggap 0). Nilai tertentu tersebut dinamakan nilai *threshold* (nilai ambang). Pemilihan nilai *threshold* awal menggunakan nilai *universal thresholding* yang diperkenalkan oleh [19], yang hanya bergantung pada banyaknya data pengamatan  $n$ , dengan data yang digunakan sebesar  $2^{11}$  untuk setiap data diperoleh nilai *threshold* awal sebesar 3,9050.



**Gambar 5.** Data simulasi yang telah 'dirusak' dengan menambahkan error

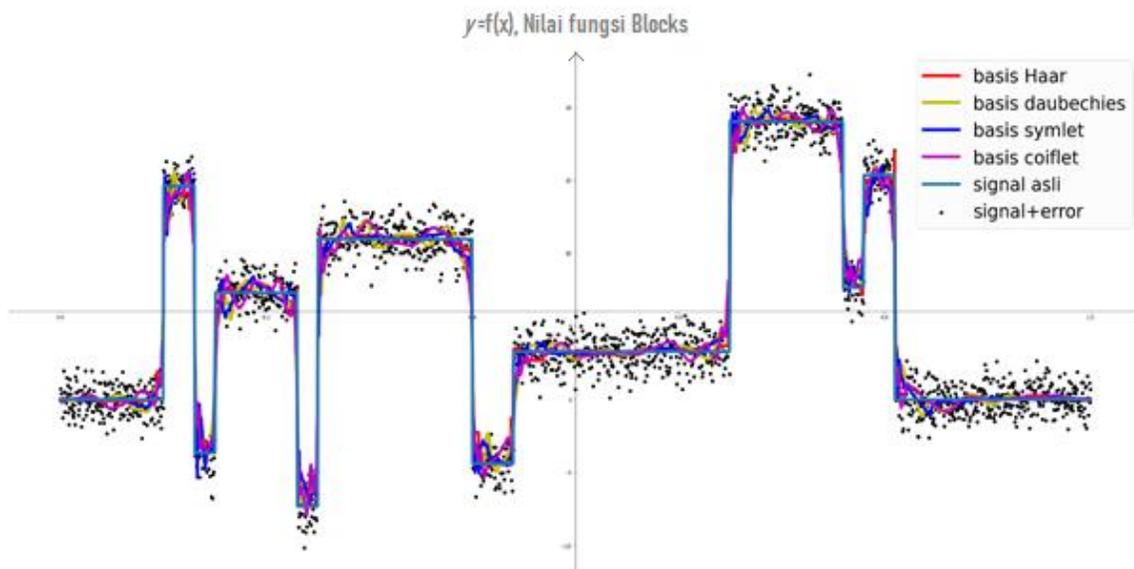
Optimalisasi parameter dilakukan dengan menggunakan nilai *threshold* awal yang telah di dapatkan pada sebesar 3,9050. Optimalisasi parameter dilakukan dalam dua tahap, pertama optimalisasi basis *wavelet*, fungsi *thresholding* dan level resolusi dilakukan secara langsung dengan membandingkan nilai *Cross Validation* (CV) dari setiap parameter untuk setiap sinyal, sedangkan pada optimalisasi nilai *threshold* dilakukan dengan menggunakan metode optimalisasi heuristik *Golden Section Search* dengan fungsi CV sebagai fungsi objektif pada proses optimalisasi.

Model aproksimasi fungsi-fungsi *nonlinear* berdasarkan tipe basis fungsi *wavelet*, jenis fungsi *thresholding*, level resolusi dan nilai CV tahap pertama diberikan oleh Tabel 1.

Tahap kedua, setelah mendapatkan nilai *thresholding* optimal menggunakan metode optimalisasi *Golden Section Search*, optimalisasi dilakukan menggunakan model terbaik yang diperoleh untuk setiap sinyal. Nilai *thresholding* optimal yang diperoleh untuk setiap model adalah 3,9050 untuk  $n/2$  data dan 4,0956 untuk  $n$  data, kecuali model 11. Untuk model 11, nilai *thresholding* optimal untuk  $n/2$  data sebesar 3,7428 dan untuk  $n$  data sebesar 3,9255.

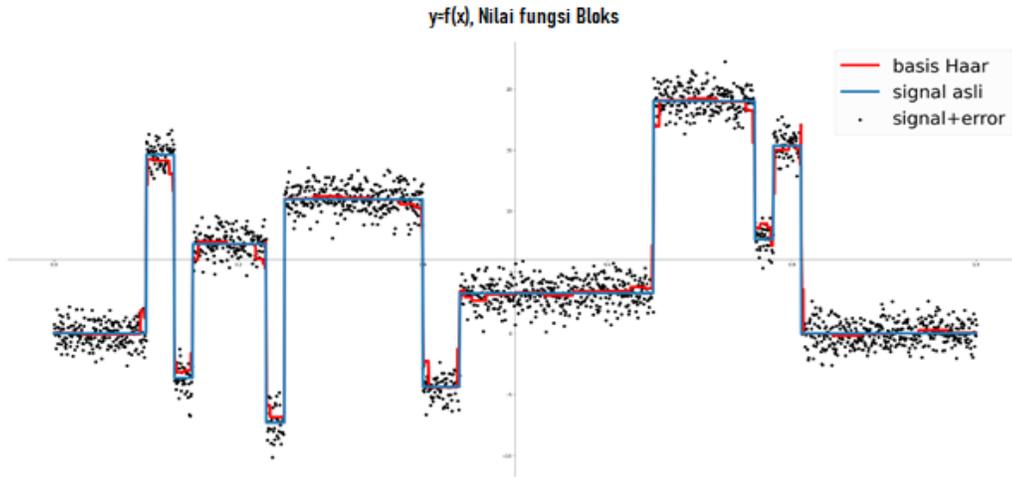
Tabel 1. Hasil aproksimasi menggunakan keempat basis *wavelet* untuk masing-masing fungsi

sinyal	parameter optimal				
	Model	basis <i>wavelet</i>	fungsi <i>thresholding</i>	Resolusi level	nilai CV
Blocks	Model 1	Haar	<i>Soft</i>	7	601,2833859775
	Model 2	Db2	<i>Soft</i>	6	608,2132341953
	Model 3	coif7	<i>Soft</i>	6	687,7792275726
	Model 4	Sym7	<i>Soft</i>	10	605,6301539735
Doppler	Model 5	Haar	<i>Soft</i>	10	24,7862282720
	Model 6	Db2	<i>Soft</i>	10	12,1867964090
	Model 7	coif3	<i>Soft</i>	10	32,1330493452
	Model 8	Sym2	<i>Soft</i>	10	12,1867964089
Bumps	Model 9	Haar	<i>Soft</i>	10	0,3264771690
	Model 10	Db6	<i>Soft</i>	9	0,1105389311
	Model 11	coif2	<i>Soft</i>	10	0,8002466417
	Model 12	Sym3	<i>Soft</i>	10	0,5284810369
Heavisine	Model 13	Haar	<i>Soft</i>	8	4,6983378974
	Model 14	Db5	<i>Soft</i>	8	2,3100750483
	Model 15	coif3	<i>Hard</i>	7	9,4647879738
	Model 16	Sym2	<i>Soft</i>	7	10,0905995365



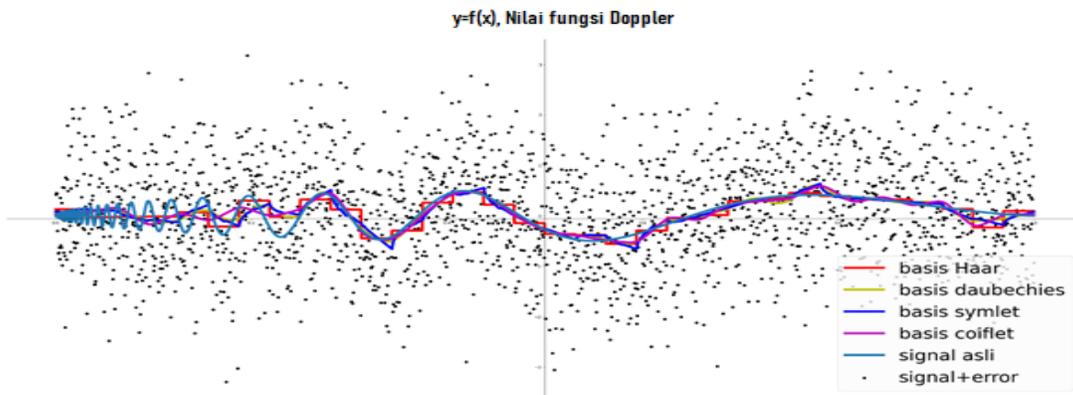
Gambar 6. Aproksimasi fungsi Blocks berdasarkan empat variansi fungsi basis

Gambar 6 memperlihatkan aproksimasi fungsi Blocks menggunakan metode wavelet *Thresholding* berdasarkan empat basis fungsi *wavelet* yang digunakan yaitu Haar, Daubechies orde 2, Coiflet orde 3, dan Symlet orde 2. Secara statistik, berdasarkan indikator nilai CV diperoleh bahwa fungsi aproksimasi menggunakan basis Haar merupakan fungsi aproksimasi terbaik untuk fungsi Blocks dengan nilai CV sebesar 601,2833859775. Gambar 7 memperlihatkan grafik fungsi Blocks, fungsi Blocks “rusak”, dan grafik fungsi aproksimasi terbaik diberikan oleh metode *wavelet thresholding* dengan basis menggunakan basis Haar (warna merah).



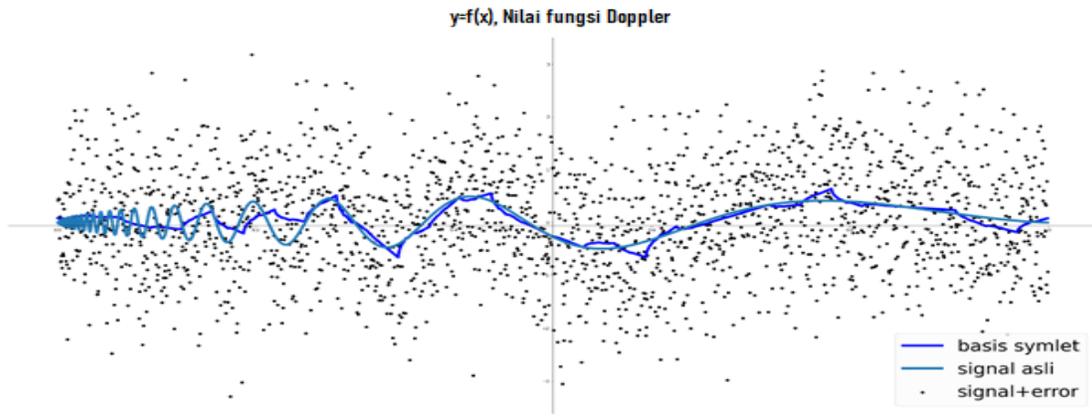
**Gambar 7.** Aproksimasi fungsi Blocks menggunakan metode *wavelet thresholding* dengan fungsi basis *wavelet* Haar

Secara kasat mata terlihat bahwa sinyal hasil aproksimasi menggunakan basis Haar hampir menutupi setiap bagian dari sinyal asli. Dengan demikian, model 1 dengan basis wavelet Haar, fungsi *soft thresholding*, dan resolusi level 7 adalah model terbaik untuk mengaprokaimasi fungsi Block yang secara statistik diberikan oleh nilai CV sebesar 601,2833859775.



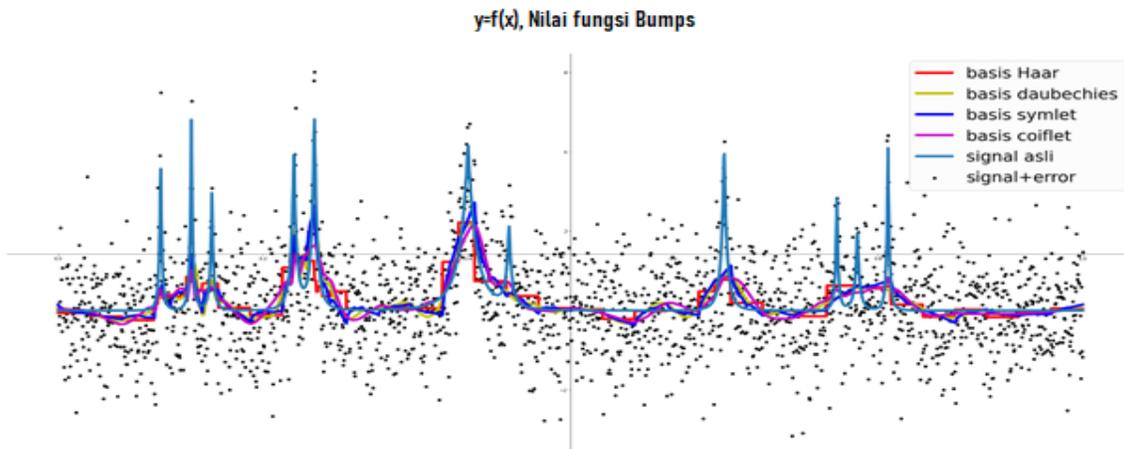
**Gambar 8.** Aproksimasi fungsi Doppler berdasarkan empat variansi fungsi basis

Selanjutnya, untuk kasus aproksimasi fungsi Doppler dengan metode *wavelet Thresholding* menggunakan empat basis yaitu *wavelet* Haar, Daubechies orde 2, Coiflet orde 3, dan Symlet orde 2 diberikan oleh Gambar 8. Secara visual, hasil aproksimasi fungsi doppler dapat dilihat bahwa ketiga basis *wavelet* selain *wavelet* Haar, dapat mempertahankan karakteristik dasar yang ada pada sinyal Doppler walaupun tidak sama persis dengan sinyal aslinya. Dari keempat basis yang digunakan untuk mengaproksimasi, berdasarkan indikator nilai CV, basis *wavelet* Daubechies orde 2 dan Symlet orde 2 merupakan model terbaik untuk mengaproksimasi sinyal tipe Doppler. Gambar 9 berikut memperlihatkan hubungan grafik fungsi aproksimasi menggunakan metode *wavelet thresholding* dengan basis Daubechies dan Symlet dengan grafik fungsi Doppler.



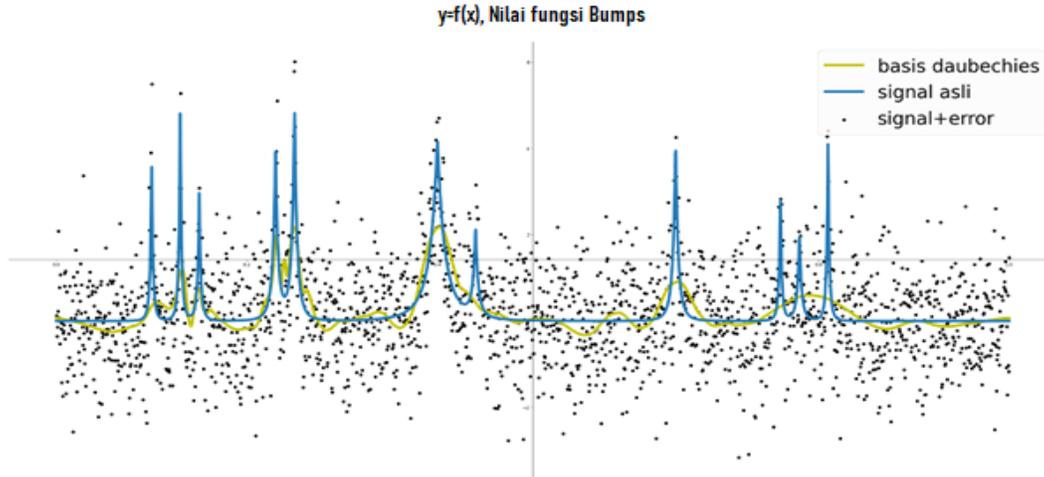
**Gambar 9.** Aproksimasi fungsi Doppler menggunakan metode *wavelet thresholding* dengan fungsi basis *wavelet* Daubechies orde 2.

Berdasarkan indikator nilai CV, model aproksimasi menggunakan basis Symlet orde 2 dengan fungsi *soft thresholding*, dan resolusi level 10 adalah model terbaik untuk mengaproksimasi fungsi Doppler dengan CV yang di peroleh sebesar 12,1867964089.



**Gambar 10.** Aproksimasi fungsi Bumps berdasarkan empat variansi fungsi basis

Gambar 10 memperlihatkan aproksimasi fungsi Bumps menggunakan empat basis wavelet yaitu Haar, Daubechies orde 6, Coiflet orde 2, dan Symlet orde 3. Secara statistik, berdasarkan indikator nilai CV diperoleh bahwa fungsi aproksimasi menggunakan basis Daubechies orde 6 merupakan fungsi aproksimasi terbaik untuk fungsi Bumps dengan nilai CV sebesar 0,1105. Gambar 11 memperlihatkan grafik fungsi Bumps, fungsi Bump “rusak”, dan grafik fungsi aproksimasi terbaik diberikan oleh metode *wavelet thresholding* dengan basis *wavelet* menggunakan basis Daubechies orde 6 (warna hijau).

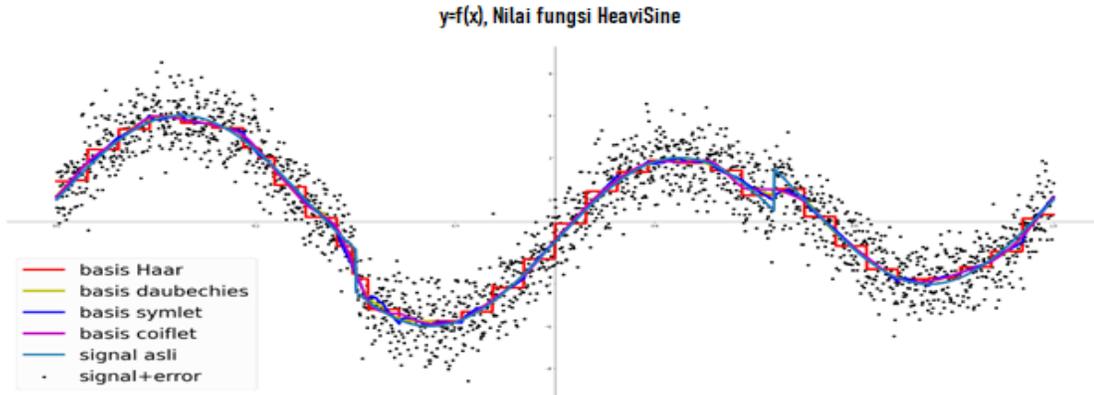


**Gambar 11.** Aproksimasi fungsi Bumps menggunakan metode *wavelet thresholding* dengan fungsi basis *wavelet* Daubechies orde 6.

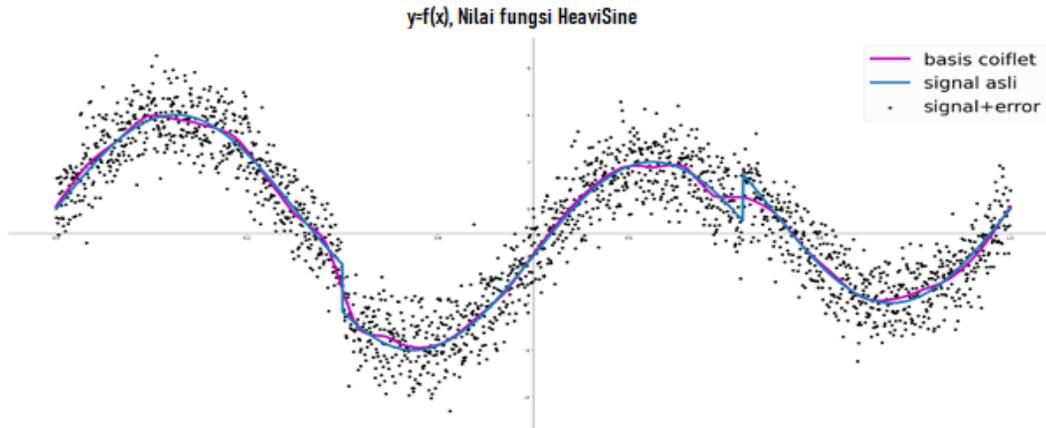
Pada visualisasi hasil aproksimasi fungsi Bumps (Gambar 11) terlihat bahwa basis *wavelet* Haar hasilnya tidak sebaik tiga basis lainnya, karena bentuk fungsi Haar itu yang seperti kotak dan tidak mulus sehingga membuatnya kurang baik dalam mengaproksimasi sinyal seperti sinyal Bumps.

Secara detail, Gambar 11 memperlihatkan bahwa sinyal hasil aproksimasi menggunakan basis Daubechies orde 6 dengan fungsi *soft thresholding*, dan resolusi level 7 adalah model terbaik untuk mengaproksimasi fungsi Bumps dengan nilai CV sebesar 0,1105389311.

Gambar 12. memperlihatkan aproksimasi fungsi Heavisine menggunakan metode *wavelet Thresholding* berdasarkan empat basis *wavelet* yaitu Haar, Daubechies orde 5, Coiflet orde 3, dan Symlet orde 2. Grafik hasil aproksimasi untuk fungsi Heavisine pada Gambar 12 tersebut terlihat bahwa ketiga basis *wavelet* dapat mempertahankan karakteristik dasar sinyal Heavisine, kecuali aproksimasi dengan basis Haar. Ketiga basis selain basis Haar memperlihatkan hasil aproksimasi yang sangat baik hampir menyerupai sinyal aslinya.



**Gambar 12.** Aproksimasi fungsi Heavisine berdasarkan empat variansi fungsi basis



**Gambar 13.** Aproksimasi fungsi Heavisine menggunakan metode *wavelet thresholding* dengan fungsi basis *wavelet* Daubechies orde 5.

Secara statistik berdasarkan indikator nilai *CV*, model aproksimasi terbaik untuk fungsi Heavisine diberikan oleh fungsi aproksimasi berbasis *wavelet* Daubechies orde 5 dengan fungsi *soft thresholding*, dan resolusi level 8 (Gambar 13) adalah model terbaik untuk mengaproksimasi fungsi Doppler dengan *CV* yang di peroleh sebesar 2,3100750483.

Secara numerik, hasil penelitian ini sejalan dengan hasil yang telah diperoleh [20] bahwa aproksimasi fungsi nonlinear menggunakan transformasi wavelet tipe Daubechies dan Symlets cukup signifikan untuk mengaproksimasi fungsi *nonlinear* menggunakan data simulasi dan data real.

### Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi, nilai *threshold* optimal untuk setiap sinyal dalam aproksimasi fungsi nonlinear menggunakan metode *wavelet thresholding* adalah 4,0956. Untuk masing-masing varian fungsi yang disimulasikan, fungsi aproksimasi terbaik menggunakan metode

*wavelet thresholding* adalah (i) fungsi Blocks diberikan oleh basis Haar dengan fungsi *thresholding* tipe *soft* dan resolusi level 10, (ii) fungsi Doppler diberikan oleh basis Symlet orde 2 dengan fungsi *thresholding* tipe *soft* dan resolusi level 10, (iii) fungsi Bumps diberikan oleh basis Daubechies orde 6 dengan fungsi *thresholding* tipe *soft* dan resolusi level 10, dan (iv) fungsi heavisine diberikan oleh basis Daubechies orde 5 dengan fungsi *thresholding* tipe *soft*, dan resolusi level 8.

### Daftar Pustaka

- [1] Iske, A. (2018). *Aproximation Theory and Algorithms for Data Analysis*. Switzerland: Springer. DOI://doi.org/10.1007/978-3-030-05228-7
- [2] DeVore, R. A. (2009). *Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation* (Akunoth, Eds.), Berlin: Springer-Verlag.
- [3] Hofinger, A. (2006). Nonlinear Function Approximation: Computing Smooth Solution with Adaptive Greedy Algorithm. *Journal of Approximation Theory*, 143, 159-175.
- [4] Hayakawa, T. (2005). A New Characterization on The Approximation of Nonlinear Function Via Neural Network: An Adaptive Control Perspective. *The European Control Conference*, 4117-4122.
- [5] Amin, H., Curtis, K. M., & Hayes-Gill, B. R. (1997). Piecewise Linear Approximation Approach to Nonlinear Function of a Neural Network. *IEE Proceeding Circuit Devices System*, Vol. 144, No. 6.
- [6] Christensen, O. & Christensen, K. L. (2004). *Aproximation Theori: From Taylor Polinomials to Wavelets*. Boston: Birkhauser.
- [7] Hall, P., & Patil, P. (1995). On *Wavelet* Methods for estimating smooth functions. *Bernoulli*, 41-58.
- [8] Zakharov, V. V., & Casco, f. (2002). Discrete fast *Wavelet* transform Algorithm and its Application to prediction problem. *AOIJ Articles*.
- [9] Warsito, B., Subanar., & Abdurakhman. (2013). *Pemodelan Time Series dengan Maximal Overlap Discrete Wavelet Transfom*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- [10] He, C., Xing, J., Li, J., Yang, Q., & Wang, R. (2015). A New Wavelet Thresholding Determination Method Considering Interscale Correlation in Signal Denoising. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-9, DOI:10.1155/2015/280251.
- [11] Hedao, P. & Godbole, S. S. (2011). Wavelet Thresholding Approach for Image Denoising. *International Journal of Network Security & It's Application*, Vol.3, No. 4, 16-21.
- [12] Kusumaningrum, D. A., Suparti, & Marudani, D. A. I. (2017). Analisis Data Runtun Waktu Menggunakan Metode Wavelet Thresholding dengan Maximal Overlap Discrete Transformation, *Jurnal Gaussian*, Vol. 6, No. 1, 2339-2541.

- [13] Nason, G. (2006). *Wavelet Methods on statistics with R*. Bristol: Springer.
- [14] Suparti. (2005). Perbandingan Estimator Regresi Nonparametrik Menggunakan. *Jurnal Matematika*, 8, 88-94.
- [15] Donoho, D. L., & Johnstone, I. M. (1998). Minimax Estimation Via *Wavelet Shrinkage*. *The Annals of Statistics*, 879-921.
- [16] Antoniadis, A., Gijbels, I., & Poggi, J. M. (2009). Smoothing Non-Equispaced Heavy Noisy Data. *Statistica Sinica*, 1371-1381.
- [17] Issaoui, H., Bouzid, A. and Ellouze, N. (2012). Comparison between soft and hard Thresholding on selected intrinsic mode selection. *2012 6th International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications (SETIT)*, 712-715. doi: 10.1109/SETIT.2012.6482001.
- [18] Jansen, M. (2001). *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*. New York: Springer-Verlag.
- [19] Ogden, R. R. (1997). *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*. Bosto: Birkhauser.
- [20] Bahri, S., Awalushaumi, L. & Susanto, M. (2018). The Aproximation of Nonlinear Function using Daubechies and Symlets Wavelets. *Proceeding of The First International Conference on Mathematics and Islam*, 300-306.