Indonesian Physical Review
Volume 2 Issue 2, May 2019
P-ISSN: 2615-1278, E-ISSN: 2614-7904

Analisis Dinamika Gasing Balik Tanpa Gesekan dengan Syarat Awal Bervariasi Berbasis Reduksi Routhian

Melly Ariska [1]
[1] *Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sriwijaya, Indonesia. E-mail: ariska.melly@yahoo.com*

Info Artikel

Article history :
Received : 10-03- 2019
Revised : 14-05-2019
Accepted : 30-05-2019

Kata Kunci:
Dinamika; Tippe Top; Syarat awal; Maple.

Cara Sitasi :
Ariska, Melly (2019). Analisis Dinamika Gasing Balik Tanpa Gesekan dengan Syarat Awal Bervariasi Berbasis Reduksi Routhian. Indonesian Physical Review, 2(2), 68-74.

DOI:
https://doi.org/10.29303/ipr.v2v2.23

Abstrak

Komputasi fisika dapat digunakan dalam membantu menyelesaikan persamaan dinamika benda yang kompleks, baik translasi maupun rotasi. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan perbedaan dinamika gasing balik dengan dan tanpa gesekan. Persamaan gerak gasing balik di bidang datar dengan gesekan telah diturunkaan dengan metode reduksi Routhian dengan persamaan Poincare dengan bantuan komputasi pada penelitian sebelumya, dan telah pula dilakukan komputasi dalam pencarian solusi numerik dinamika gasing balik dengan gesekan menggunakan program Maple. Dalam penelitian ini reduksi yang digunakan adalah reduksi Routhian, sehingga persamaan yang digunakan dalam menentukan persamaan gerak gasing balik adalah persamaan Poincaré yang didasari oleh reduksi Routhian dengan dan tanpa gesekan. Pengaruh gesekan dapat terlihat jelas melalui persamaan dinamika dan grafik pada gasing balik. Metode ini dapat menurunkan persamaan gerak gasing balik dengan dan tanpa gesekan yang bergerak di bidang datar dengan jelas berupa himpunan persamaan diferensial. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menyelesaikan persamaan dinamika gasing balik di bidang melengkung seperti torus dan bola. Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan gerak gasing balik dengan dan tanpa gesekan memanfaatkkan komputasi fisika berbasis maple. Hasil temuan penelitian ini adalah persamaan dinamika dan grafik persamaan gasing balik dengan dan tanpa gesekan

Pendahuluan

Benda tegar merupakan sistem partikel yang memiliki posisi relatif antar partikel tetap, yakni jarak antara sebarang dua partikel dalam sistem tersebut tetap [1]. Contoh gerak benda tegar adalah gerak gasing balik. Gerak gasing balik pada berbagai arena merupakan contoh keseharian sistem gerak benda tegar dengan kendala non-holonomik, namun dengan kajian mekanika yang tidak sederhana. Gasing balik merupakan sejenis gasing yang memiliki bentuk bola terpotong dengan batang kecil sebagai pegangannya dan dapat membalik sendiri dalam keadaan berputar [2]. Ketika bagian bolanya diputar dengan kecepatan sudut yang tinggi pada permukaan bidang datar, maka gasing balik ini akan berbalik berputar pada bagian batangnya tadi. Fenomena ini disebut inversi [3].

Pada penelitian yang dilakuan Ciooci,dkk [4] dan Moffat [5, 6], persamaan gerak gasing balik dirumuskan untuk gasing balik yang bergerak di bidang datar dengan menggunakan berbagai metode seperti persamaan Euler dan persamaan Maxwell-Bloch. Penulis tertarik untuk menganalisis Dinamika Gasing Balik Tanpa Gesekan dengan Syarat Awal Bervariasi Berbasis Reduksi Routhian. Sebelum menganalisis gerak gasing balik tanpa gesekan, penulis akan meninjau gerak gasing balik di bidang datar dengan gesekan sesuai dengan penelitian yang telah dilakukan Ariska [7, 8] sebelumnya.

Reduksi Routhian dipilih oleh oleh penulis karena persamaan ini dapat merumuskan dinamika sistem yang bergerak kompleks seperti sistem yang bergerak translasi sekaligus rotasi [9]. Selain itu, Reduksi Routhian juga dapat menggambarkan sistem dinamik berupa sistem persamaan diferensial [10]. Dinamika rotasi sulit dirumuskan dengan persamaan Euler-Lagrange karena dinamika rotasi mengandung kecepatan sudut yang pada umumnya bukanlah turunan waktu secara langsung dari koordinat umum. Hal ini disebabkan generator rotasi tidak komutatif, sehingga dinamika rotasi sulit jika diselesaikan dengan persamaan Euler-Lagrange [11]. Analisis ini merupakan upaya untuk memahami gerak gasing balik jika begerak di bidang datar tanpa gesekan.

Tinjauan Pustaka

Salah satu pembahasan dalam fisika yang cukup kompleks adalah permasalahan kinematika dan dinamika [12]. Dinamika (gerakan) dapat berupa gerak translasi dan gerak rotasi. Setiap benda di alam semesta mengalami dinamika baik translasi, rotasi, maupun keduanya. Gerak benda diruang konfigurasi translasi sekaligus rotasi sangat rumit jika dianalisis secara manual [13]. Hal ini tentu saja diperlukan bantuan komputasi dalam menyelesaikannya. Gerak benda yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah gerak gasing. Mengingat gerak gasing merupaan contoh gerak benda yang dapat bergerak secara translasi maupun rotasi. Khususnya gasing yang dapat membalik sendiri, yang disebut gasing balik (*tippe top*). Penelitian yang dilakukan Ariska [7, 8] telah berhasil menyelesaikan persamaan dinamika gasing balik di bidang datar dengan gesekan sekaligus menggambarkan persamaan geraknya dengan menggunakan komputasi fisika. Akan tetapi belum terlihat dinamika gasing jika begerak di bidang tanpa gesekan. Pada penelitian ini peneliti akan menganalisis gerak gasing balik dipermukaan bidang datar tanpa gesekan. Peneliti akan memprediksi dinamika gasing balik di permukaan datar tanpa gesekan masih bisa membalik atau tidak. Dalam menyeleaikan persamaan ini bukanlah hal yang mudah, karena ruang konfigurasi yang akan dilewati gasing balik merupakan bidang datar tanpa gesekan yang merupakan bidang yang bergerak dengan menggunakan tiga sistem koordinat, sehingga jumlah koordinat umum yang akan diselesaikan adalah 5 koordinat umum, yaitu dua koordinat translasi dan empat koordinat rotasi. Selain itu peneliti juga akan menganalisis sekaligus memprediksi gerakan gasing balik tanpa gesekan.

Analisis dinamika gasing balik akan dilakukan dengan komputasi fisika. Penelitian ini merupakan implementasi dari mata kuliah komputer dalam pembelajaran fisika. Berdasarkan riset sebelumnya, seperti yag dilakukan oleh Bourabee [3] yang menganalisis dinamika gasing balik di bidang datar dengan berbagai persamaan yaitu persamaan Eular, persamaan Lagrange dan persamaan Hamilton dan persamaan Poincare. Hasil persamaan yang didapat berupa persamaan diferenial yang menggambarkan dinamika gasing balik di bidang datar. Hasil analisis yang di dapat diuraikan dengan ruang konfigurai berupa translasi yaitu bidang datar. Peneliti akan mengembangkan hasil analisis yang didapatkan dengan menganalisis gerak gasing balik dengan ruang konfigurasi berupa bidang datar tanpa gesekan. Oleh sebab itu, Peneliti tertarik untuk mengangkat penelitian dengan judul Analisis Dinamika Gasing Balik dengan Syarat Awal Bervariasi Berbasis Maple.

Metode

Penelitian ini bersifat kajian teoretis matematis. Penelitian dilakukan dengan tinjauan terhadap beberapa pustaka mengenai sistem mekanik pada kasus *tippe top* yang telah dikembangkan sebelumnya serta perhitungan matematis dengan menggunakan komputasi fisika, khususnya berbasis Maple. Persamaan yang digunnakan adalah persamaan Poincaré yang didasari Reduksi Routhian, yang dapat dijelaskan sebagai berikut,

Andaikan ditemukan koordinat siklik q^1, dengan

1. $\beta_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}$ adalah momentum yang lestari sehingga $\dot{q}^1 = \psi(q^2, \dots, q^n, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n, \beta_1)$.
2. $R = L - \dot{q}^1 \beta_1$

dengan mengacu pada reduksi Routhian, persamaan Poincaré dituliskan dengan mempertahankan variabel sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial v^\rho} - \sum_{\mu=2}^{n}\sum_{\lambda=2}^{n} c^\lambda{}_{\mu\rho} v^\mu \frac{\partial R}{\partial v^\lambda} - \sum_{\mu=2}^{n} c^\lambda{}_{\mu\rho} v^\mu \beta_1 - X_\rho R = 0, \qquad \rho = 2, \dots, n \tag{1}$$

Sehingga peamaan yang digunakan untuk dinamika gasig balik tanpa gesean adalah

Persamaan gerak gasing balik untuk koordinat θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial v^\theta} - \left(c^\phi_{\psi\theta} v^\psi \frac{\partial R}{\partial v^\phi}\right) - \left(c^\psi_{\phi\theta} v^\phi \beta_1\right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

Persamaan Gerak gasing balik untuk koordinat $\boldsymbol{\phi}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial v^\phi} - \left(c^\theta_{\psi\phi} v^\psi \frac{\partial R}{\partial v^\theta}\right) - \left(c^\psi_{\theta\phi} v^\theta \beta_1\right) - \frac{\partial R}{\partial \phi} = 0 \tag{3}$$

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Penelitian Ariska [7] telah mendapatkan persamaan gasing balik di bidang datar dengan gesekan adalah,

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta}{I}\left(2\dot{\phi}\beta_1 + \cos\theta\, I\dot{\phi}^2 + mga\right) - \frac{\mu|F_N|\dot{x}}{I}(R - a\cos\theta) \tag{4}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I\sin\theta}\left(-\mu|F_N|\dot{y}(a - R\sin\theta) - \beta_1\dot{\theta}(1 - \csc\theta) - 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right) \tag{5}$$

$$\ddot{x} = -\mu\frac{|F_N|}{m}\left(\dot{x} + \left(R\dot{\psi} + a\dot{\phi}\right)\sin\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi\,(a\cos\theta - R)\right) \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -\mu \frac{|F_N|}{m}\left(\dot{y} + \left(R\dot{\psi} + a\dot{\phi}\right)\sin\phi \sin\phi + \dot{\theta}\sin\phi\,(R - a\cos\theta)\right) \tag{7}$$

Dengan gaya normal sebesar,

$$|F_N| = mg + m\ddot{z} = mg + ma(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta) \tag{8}$$

Persamaan (4), (5), (6), dan (7) merupakan solusi numerik untuk koordinat θ,$\boldsymbol{\phi}$, y,x dengan syarat awal gasing balik sebagai berikut.

Tabel 1. Syarat Awal Gasing Balik

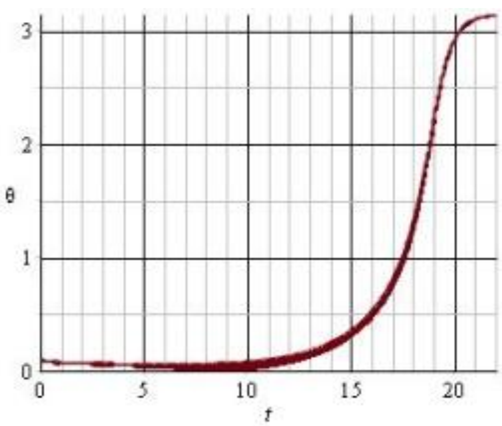
I_n=$I_{n'}$=I (gr.cm^2)	I_3 (gr.cm^2)	m_{total} (g)	R (cm)	D (cm)
45	50	13	1.3	2.6

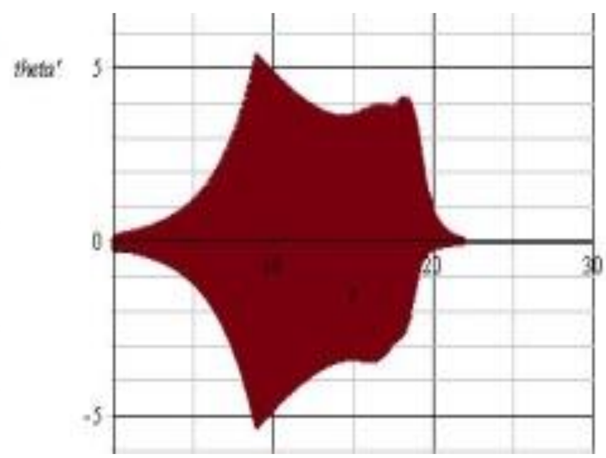
Nilai Syarat awal berdasarkan penelitian sebelumnya [1,9,13] terdapat pada Tabel 2,

Table 2. Syarat Awal Berdasarkan Penelitian Terdahulu

$\theta(t)$ rad	$\phi(0)$ rad	$\dot{\phi}(0)$ rad/s	$\dot{\theta}(0)$ rad/s	$\dot{x}(0)$ cm/s	$\dot{y}(0)$ cm/s	β_1 gm^2rad/s	μ
0.1	0	0	0	0	0	2,500	0.3

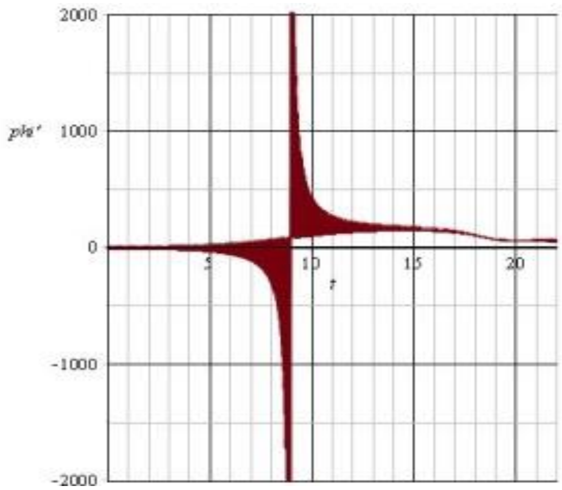
Didapatkan Grafik seperti berikut,



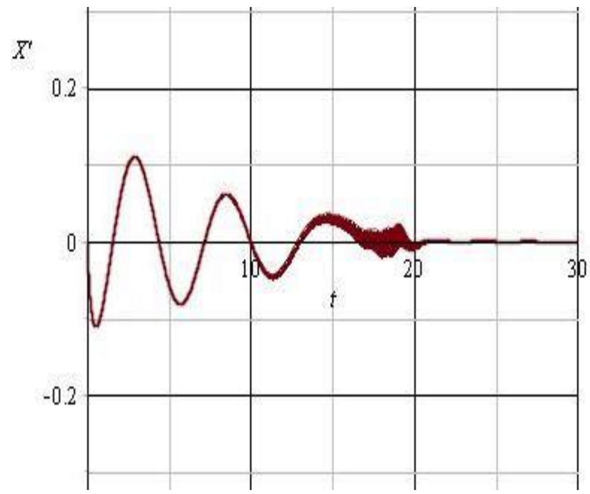


Gambar 1a. Grafik θ(t)Terhadap Waktu

Gambar 1b. Grafik $\dot{\theta}(t)$Terhadap Waktu



Gambar 2a. Grafik $\dot{\Phi}(t)$ terhadap Waktu



Gambar 2b. Grafik $\dot{x}(t)$ terhadap Waktu

Berdasarkan hasil Penelitian Ariska[8] dengan syarat awal yang sama dengan Tabel 1 dan Tabel 2 maka persamaan gerak gasing balik di bidang datar melalui reduksi Routhian tanpa gaya gesekan didapatkan hasil sebagai berikut,

Persamaan gerak gasing balik untuk koordinat θ

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta}{I}\left(\cos\theta\left(I\dot{\phi}^2\right) + \left(2\beta_1\dot{\phi} + mga\right)\right) \tag{9}$$

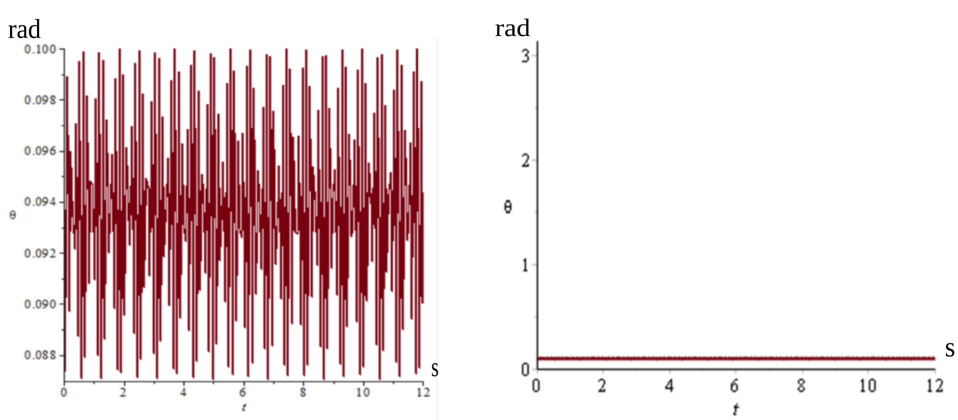
Persamaan Gerak gasing balik untuk koordinat ϕ

$$\ddot{\phi} = \frac{\beta_1}{l}\dot{\theta}\csc\theta(1-\csc\theta) - \frac{2I}{l}\theta\phi\,\dot{c}\mathrm{ot}\,\theta \tag{10}$$

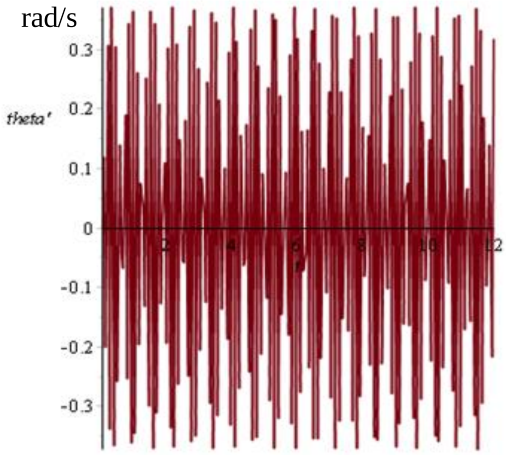
Persamaan untuk koordinat x dan y

$$\ddot{x} = 0 \text{ dan } \ddot{y} = 0 \tag{11}$$

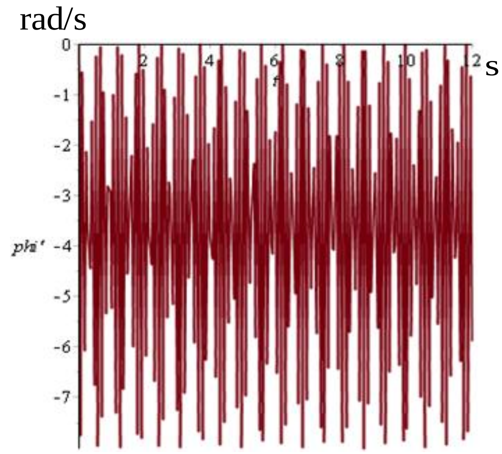
Berdasarkan persamaan (9) dan persamaan (10) dapat digambarkan grafik yang mendeskripsikan dinamika gasing balik tanpa gesekan di bidang datar sebagai berikut,



Gambar 3. Grafik hubungan sudut θ terhadap waktu



Gambar 4a. Grafik $\dot{\theta}$ terhadap waktu



Gambar 4b. Grafik $\dot{\phi}$ terhadap waktu

Persamaan gasing balik yang bergerak di bidang datar tanpa gesekan dengan reduksi Routhian terdapat pada persamaan (9), (10), dan (11) untuk setiap koordinat. Persamaan tersebut menyatakan bahwa kecepatan sudut θ dan kecepatan sudut ϕ bertahan konstan, begitu juga untu koordinat x dan y, tidak ada gerakan yang terjadi pada koordinat x dan y sehingga percepatan untu koordinat x dan y bernilai nol. Persamaan-persamaan ini menggambarkan bahwa gasing balik berada dalam keadaan stabil berputar konstan dengan presisi yang sangat kecil pada sumbu z dan tidak ada gerakan translasi dari gasing balik. Persamaan (9), (10), dan (11) dapat digambarkan meggunakan komputasi dengan hasil pada Gambar 4a dan Gambar 4b yang dapat dilihat bahwa jika permukaan bidang datar tempat gasing balik bergerak tidak ada gesekan (licin), maka gasing balik tidak akan membalik. Gasing balik hanya akan bergerak dan slip berputar dengan kecepatan konstan dengan presisi yang kecil, sehingga gasing balik ini akan bergerak seperti gasing konvensional. Hal ini berbeda untuk gerakan gasing balik dengan gesekan yang persamaannya dinyatakan dengan persamaan (4), (5), (6), dan (7) dan gambaran dinamikanya pada Gambar 1a, 1b, 2a, 2b dapat dilihat bahwa gasing balik berputar kemudian secara perlahan gasing balik akan mengalami pembalikan yaitu pada detik ke-20, setelah $\theta(t)$ membentuk sudut sebesar π, gasing balik akan berputar dengan batangnya secara stabil tanpa presisi terhadap sumbu $z$dimana kecepatan presisi dan kecepatan sudut $\theta(t)$bernilai nol. Jadi, setelah membalik gasing balik akan berputar dengan batangnya tanpa presisi dan mengalami keadaan stabil *(steady state)*.

Simpulan

Berdasarkan Penelitian diatas dapat disimpulkan bahwa dengan reduksi Routhian Persamaan Dinamika Gasing balik yang bergerak dibidang datar dengan dan tanpa gesekan yang bergerak kompleks dapat dirumuskan dengan baik berupa persamaan diferensial. Hasil analisis dinamika gasing balik sebelumnya dengan gesekan didapatlah hasil bahwa gasing balik akan membalik dengan sempurna. Akan tetapi gasing balik yang bergerak di bidang datar tanpa gesekan dapat dilihat pada Gambar 3, 4a dan 4b yang menyatakan bahwa jika permukaan bidang datar tempat gasing balik bergerak tidak ada gesekan (licin), maka gasing balik tidak akan membalik. Hal ini dinyatakan melalui grafik dengan kecepatan sudut $\dot{\theta}$ dan kecepatan sudut $\dot{\phi}$ bernilai konstan. Gasing balik berada dalam keadaan stabil berputar konstan dengan presisi yang sangat kecil pada sumbu $\hat{e}_z$dan tidak ada gerakan translasi dari gasing balik. Sedangkan untuk gasing balik yang bergerak di bidang datar dengan gesekan dapat dilihat melalui Gambar 1a, 2b, dan 3 yang menyatakan bahwa setelah gasing balik berputar selama beberapa detik maka secara perlahan gasing balik akan mengalami pembalikan, kemudian setelah $\theta(t)$ mendekati sudut sebesar π, gasing balik akan berputar stabil dengan batangnya tanpa presisi pada sumbu $\hat{e}_z$.

Daftar Pustaka

[1] Goldstein H (1980). Classical Mechanics. Cambridge: Addison-Wesley.

[2] Cohen RJ. The Tippe Top Revisited (1977). *American Journal of Physics,* **45**(1), 12-17. doi: https://dx.doi.org/10.1119/1.10926.

[3] Bou-rabee NM, Marsden JE and Romero LA (2004). Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability. *SIAM Journal Applied Dynamical Systems*, **3**(3), 352-377. doi: https://dx.doi.org/10.1137/030601351.

[4] Ciocci MC, Malengier B, Langerock B and Grimonprez B (2012). Towards a Prototype of a Spherical Tippe Top. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**(15). doi: http://dx.doi.org/10.1155/2012/268537.

[5] Moffatt HK and Shimomura Y (2006). Classical dynamics: Spinning eggs - a paradox resolved. *Nature,* **416**, 385–386. doi: https://dx.doi.org/10.1038/416385a.

[6] Moffatt HK, Shimomura Y, and Branicki M (2004). Dynamics of axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation. *Proceedings of The Royal Society of London Series A*. The Royal Society, 3643–3672. doi: https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1329.

[7] Melly Ariska (2018). Utilization of Maple-based Physics Computation in Determining the Dynamics of Tippe Top. *Jurnal Penelitian Fisika dan Aplikasinya*, 8(2), 15-123. doi: 10.26740/jpfa.v8n2.p115-123.

[8] Melly Ariska (2018). Analisis Momen Inersia *Tippe Top* Di Bidang Datar Sebagai Kontribusi Pada Mata Kuliah Mekanika. *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika*, 5(2), 181-186.

[9] Holm DD, Schmah T, andStoica C (2009). Geometry Mechaanics and Symetry from Finite to Infinite Dimensions. New York: Oxford University Press.

[10] Hall BC (2003). Lie Groups, Lie algebras, and representations. New York: Springer-Verlag.

[11] Talman R (1999). Geometric Mechanics. New York: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KgaA.

[12] Fowles and Cassiday (2005). Analytical Mechanics. USA: Thomson Learning. Inc

[13] Mamaev IS and Borisov AV (2002). Rolling of a rigid body on plane and sphere. *Hierarchy of dynamics. Regular and Chaotic Dynamics*, **7**(2), 177–200. doi: https://dx.doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000204.